УДК 532.685

МОДЕЛИРОВАНИЕ ФИЛЬТРАЦИИ УГЛЕВОДОРОДОВ В ПОРИСТОЙ СРЕДЕ

Киреев В. А.,
научный руководитель д-р физ.-мат. наук Добронец Б. С.
Сибирский федеральный университет,
Институт математики

Значительные масштабы поступления нефти в окружающую среду при освоении нефтегазовых ресурсов приводят к тому, что данный вид загрязнения является основным для многих районов нефтедобычи. В настоящее время быстро развиваются методы исследования проблем экологической безопасности при нефтяном загрязнении. Для мониторинга динамики распространения углеводородного загрязнения создаются и исследуются геофильтрационные математические модели. Поэтому в настоящее время построение модели фильтрации нефти в пористой среде и разработка на ее основе программного обеспечения является актуальным направлением.

Начиная с работ Анри Дарси (1803 – 1858), проблеме изучения особенностей движения жидкостей и газов в пористых средах посвящено значительное число работ. Свой вклад в развитие нового раздела гидродинамики внесли ряд ученых: Ж. Дюпюи (1804-1866), Ж. Буссинеск (1842-1929), Ф. Форхгеймер (1852-1933), Ч. Слихтер (1864-1946), Н. Е. Жуковский (1847-1921), К. Э. Лембке, М. Маскет, Л. С. Лейбензон (1879–1951), Р. Льюис и другие

Цель исследования заключается в построении математической модели процесса нефтезагрязнения пористых сред, изучении на ее основе динамики распространения углеводородов с учетом действующих факторов и разработке программного обеспечения. Для достижения поставленной цели решаются следующие задачи:

Формирование модели предметной области. Построение математической модели для оценки распространения нефтепродуктов в почве. Модель должна быть адекватной естественным условиям. Решение задачи фильтрации нефти в пористой среде и проведение сравнительного анализа численных результатов с экспериментальными данными.

Исходная информация для обоснования системы основных уравнений модели была получена из анализа серии экспериментов: анализ механизма загрязнения хорошо проницаемых и менее проницаемых сред; определение динамики миграции углеводородов в макрооднородной воздушно-сухой почве; анализ механизма растекания загрязнителя по границе раздела двух сред различной проницаемости.

Построение модели будем выполнять при следующих допущениях: рассматривается несжимаемая жидкость в водонасыщенной пористой среде переменной пористости, среда изотропна с постоянными физическими свойствами за исключением пористости. Пористость среды определяется как отношение объема пустот ко всему объему. Боковые границы не влияют на процесс фильтрации.

В соответствии с принятыми допущениями было определено множество параметров. Входными параметрами модели являются: пористость в рассчитываемой области (ϵ), динамическая (μ_f), кинетическая (ν_f) и эффективная (μ_e) вязкости жидкости, плотности жидкости (ρ_f) и среды (ρ_s), удельные теплоемкости (c_p) жидкости и среды, проницаемость среды (k), коэффициент теплового расширения жидкости (β), динамическая, кинетическая и эффективная вязкости жидкости, плотности жидкости и среды, удельные теплоемкости жидкости и среды, проницаемость среды, коэффициент теплового расширения жидкости, начальные и граничные условия. В направлении гравитации на поток действует сопротивление частиц пористой среды в соответствии с соотношениями, данными Эргуном (Эргун, 1952):

$$au_i + bu_i^2 = -\frac{\partial p}{\partial x_i}; a = 150\frac{(1-\epsilon^2)\mu_f}{\epsilon^3 d_p^2}; b = 1.75\frac{(1-\epsilon)}{\epsilon^3}\frac{\rho_f}{d_p}$$

Исходя из цели моделирования, определяются выходные параметры: глубина, ширина и высота распространения нефтезагрязнения; скорости образования зоны нефтяного загрязнения.

На основе законов, управляющих течением углеводородов, были выписаны полные балансовые уравнения для трехмерного потока с учетом действующих факторов. Из уравнений неразрывности и закона Дарси были выведены уравнения баланса массы, импульса и сохранения энергии. Оператор модели включает систему дифференциальных нелинейных уравнений параболического и эллиптического типа.

Данная модель описывает процесс нестационарной фильтрации углеводородов в различных почвенных средах при переменных коэффициентах фильтрации.

Уравнение неразрывности $\frac{\partial u_i{}^*}{\partial x_i{}^*} = 0$ (1)

Уравнение импульса:

$$\frac{\partial u_i{}^*}{\partial t^*} + u_j^*\frac{\partial}{\partial x_j{}^*}\left(\frac{u_i{}^*}{\epsilon}\right) = -\frac{\partial}{\partial x_i{}^*}\left(\epsilon p_f^*\right) - \left(\frac{\epsilon Pr}{Da} + \frac{1.75}{\sqrt{150}}\frac{|V^*|}{\sqrt{\epsilon Da}}\right)u_i^* + JPr\left(\frac{\partial^2 u_i^*}{\partial x_i^{*2}}\right) + \gamma_i\epsilon RaPrT^*$$

(2)

Уравнение энергии: $\sigma\frac{\partial T^*}{\partial t^*} + u_i^*\frac{\partial T^*}{\partial x_i{}^*} = k^*(\frac{\partial^2 T^*}{\partial x_i^{*2}})$ (3)

Уравнения (1)-(3) записаны в безразмерных величинах с использованием обозначений $x_i^* = \frac{x_i}{L}$ – декартовы координаты, $u_i^* = \frac{u_i L}{\alpha_f}$ –скорость, $p_f^* = \frac{p_f L^2}{\rho_f \alpha_f{}^2}$ – давление, $t^* = \frac{t\alpha_f}{L^2}$ – время, $T^* = \frac{T-T_a}{T_w-T_a}$ – температура, $\epsilon = \frac{\text{объем пустот}}{\text{весь объем}}$ – пористость, $Pr = \frac{\nu_f}{\alpha_f}$ – число Прандтля, $Da = \frac{k}{L^2}$ – число Дарси, $|V^*|$ - модуль вектора скорости, $J = \frac{\mu_e}{\mu_f}$ – отношение эффективной вязкости к динамической, γ_i – единичный вектор в направлении гравитации, $Ra = \frac{g\beta\Delta TL^3}{\nu_f\alpha}$ – число Рэлея, $\sigma = \frac{\epsilon(\rho c_p)_f + (1-\epsilon)(\rho c_p)_s}{(\rho c_p)_f}$ – коэффициент теплоемкости, $k^* = \frac{k}{k_f}$ – коэффициент проницаемости, L – характеристическое измерение. По повторяющемуся индексу подразумевается суммирование.

Начальные условия: $u^*(t=0, x_1, x_2, x_3) = \xi_u(x_1, x_2, x_3)$; $T^*(t=0, x_1, x_2, x_3) = \xi_T(x_1, x_2, x_3)$;

Граничные условия: $\begin{cases} u^*(t, x_1 = a, x_2, x_3) = \varphi_1(t, x_2, x_3); \\ u^*(t, x_1 = b, x_2, x_3) = \varphi_2(t, x_2, x_3); \end{cases}$

$\begin{cases} u^*(t, x_1, x_2 = c, x_3) = \psi_1(t, x_1, x_3); \\ u^*(t, x_1, x_2 = d, x_3) = \psi_2(t, x_1, x_3); \end{cases}$ $\begin{cases} u^*(t, x_1, x_2, x_3 = p) = \zeta_1(t, x_1, x_2); \\ u^*(t, x_1, x_2, x_3 = q) = \zeta_2(t, x_1, x_2); \end{cases}$

$$\begin{cases} T^*(t, x_1 = a, x_2, x_3) = \varphi_1^*(t, x_2, x_3); \\ T^*(t, x_1 = b, x_2, x_3) = \varphi_2^*(t, x_2, x_3); \end{cases}$$

$\begin{cases} T^*(t, x_1, x_2 = c, x_3) = \psi_1^*(t, x_1, x_3); \\ T^*(t, x_1, x_2 = d, x_3) = \psi_2^*(t, x_1, x_3); \end{cases}$ $\begin{cases} T^*(t, x_1, x_2, x_3 = p) = \zeta_1^*(t, x_1, x_2); \\ T^*(t, x_1, x_2, x_3 = q) = \zeta_2^*(t, x_1, x_2); \end{cases}$

где $t \in [0, t_k]$, $x_1 \in [a, b]$, $x_2 \in [c, d]$, $x_3 \in [p, q]$.

Локальная пористость $\epsilon = \epsilon(x_1, x_2, x_3)$;

Для дискретизации по времени используем простейшую схему первого порядка точности $\frac{\partial u_i}{\partial t} = \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\tau}$, где $\tau -$ шаг по времени, т. е. $t_n = n\tau$. Далее введем в пространстве (X_i, τ) прямоугольную сетку, состоящую из точек $X_i = X_{i,0} + h_i$. Множество точек $X_i (i = 1,2,3)$ образуют сетку. Дискретизацию уравнения (2) можно выполнить по явной схеме:

$$\frac{u_i^{n+1}-u_i^n}{\tau} = -\left(\frac{\epsilon Pr}{Da} + \frac{1.75}{\sqrt{150}}\frac{|V^n|}{\sqrt{\epsilon Da}}\right)u_i^n - \frac{\partial(\epsilon p^{n+1})}{\partial x_i} - u_j^n\frac{\partial\left(\frac{u_i^n}{\epsilon}\right)}{\partial x_j} + JPr\left(\frac{\partial^2 u_i^n}{\partial x_i^{n2}}\right) + \gamma_i \epsilon RaPrT^{n+1} \quad (4)$$

Перепишем это уравнение в виде $u_i^{n+1} = u_i^n + \tau\left[G^i(u_i^n) - \frac{\partial(\epsilon p^{n+1})}{\partial x_i} + \gamma_i \epsilon RaPrT^{n+1}\right]$ (5),

где $G^i(u_i^n) = -\left(\frac{\epsilon Pr}{Da} + \frac{1.75}{\sqrt{150}}\frac{|V^n|}{\sqrt{\epsilon Da}}\right)u_i^n - u_j^n\frac{\partial\left(\frac{u_i^n}{\epsilon}\right)}{\partial x_j} + JPr\left(\frac{\partial^2 u_i^n}{\partial x_i^{n2}}\right)$ (5.1)

Т.к. из уравнения (1) $\frac{\partial u_k^{n+1}}{\partial x_k} = 0$, то, подставляя уравнение (5) в это выражение, выполнив соответствующие преобразования, получаем уравнение давления, где правая часть определена через величины с предыдущего шага: $\frac{\partial^2(\epsilon p^{n+1})}{\partial x_k{}^2} = \frac{\partial}{\partial x_k}\left[\frac{u_i^n}{\tau} + G^i(u_i^n)\right]$. (6)

Уравнение энергии запишется как $T^{n+1} = T^n + \frac{\tau}{\sigma}\left[-u_i\frac{\partial T^n}{\partial x_i} + k^*\frac{\partial^2 T^n}{\partial x_i{}^2}\right]$. (7)

Таким образом, для расчета поля скоростей, давления и температуры на (n+1) временном шаге имеем замкнутую систему уравнений (5)-(7).

Конструктивный путь рассматриваемого метода расчета искомых функций u_i^{n+1}, p^{n+1}, T^{n+1} в момент времени $t_n = (n+1)\tau$ представляется в виде следующей вычислительной процедуры. На первом этапе по известным с предыдущего шага значениям T^n вычисляется поле энергии T^{n+1} на (n+1) шаге. На втором этапе по известным с предыдущего шага u_i^n вычисляются значения величин $G^i(u_i^n)$ с помощью алгебраических формул, полученных в процессе дискретизации выражения (5.1). На третьем этапе, зная правую часть уравнения Пуассона (6), рассчитывается поле давления p^{n+1}. На четвертом этапе по найденным полям давления p^{n+1}, энергии T^{n+1} и скорости u_i^n рассчитывается поле скорости на (n+1) шаге. На этом расчет текущего временного цикла заканчивается. Скорость, рассчитываемая на каждой новой итерации по времени, уже удовлетворяет уравнению неразрывности, и нет необходимости строить поправки.

Получена динамическая модель фильтрации нефтезагрязнителя в пористой среде переменной пористости, которая позволит оценивать степень загрязнения и восстановления загрязненных почвенных сред, определять динамику миграции углеводородов, фильтрующихся с поверхности земли, а также устанавливать закономерности изменения зоны нефтяного загрязнения.